اطلاعات کوانتومی ـ بخش سوم

وحیدکریمی پور ـ دانشکده فیزیک ـ دانشگاه صنعتی شریف

۱۳ اردیبهشت ۱۴۰۴

۱ مقدمه

در این درس به بررسی ظرفیت های یک کانال کوانتومی می پردازیم. بر خلاف کانال کلاسیک، برای یک کانال کوانتومی چندین نوع ظرفیت تعریف می شود. در این درس تعاریف زیر را بررسی می کنیم:

یک ـ ظرفیت کلاسیک یک کانال کوانتومی، [۱]

دو ـ ظرفیت کلاسیک ـ درهم تنیده یک کانال کوانتومی [۲]

سه ـ ظرفیت کوانتومی یک کانال کوانتومی، [۳]

دلیل این تنوع هم این است که از یک کانال کوانتومی می توانیم به روش های مختلف برای مخابره اطلاعات استفاده کنیم. به عنوان مثال می توانیم از یک کانال کوانتومی فقط برای مخابره اطلاعات کلاسیک استفاده کنیم. به عنوان مثال می توانیم رشته های چند بیتی $m \in \{0,1\}^k$ را در حالت های کوانتومی n کیوبیتی $|\psi_m\rangle \in H_n$ بارگذاری کرده و آنهارا به مقصد ارسال کنیم. کلاسیک بودن پیام ها به این معناست که این

[۱] Classical Capacity of a Quantum Channel

[۲] Quantum Capacity of a Quantum Channel

[۳] Entanglement-Assisted Classical Capacity of a Quantum Channel

رشته ها می بایست بر هم عمود باشند، یعنی

$$\langle\psi_m|\psi_{m'}\rangle = \delta_{m,m'}.$$

در مقصد این حالت ها شناسایی شده و پیام های کلاسیک از روی آنها خوانده می شود. البته پس از عبور از کانال حالت های کوانتومی دیگر خالص نخواهند بود و عمود بودن و تمیزپذیر بودن آنهانیز از بین می رود. هدف گیرنده یا (باب) هم این است که با بهترین اندازه گیری ها بتواند بفهمد که واقعا کدامیک از حالت های $\psi_m\rangle$ برای او ارسال شده است. می توانیم بپرسیم که اصولا چرا کسی مثل آلیس باید بخواهد پیام های کلاسیک اش را از یک کانال کوانتومی مخابره کند؟ چرا این پیام ها را از همان کانال کلاسیک ارسال نمی کند؟ پاسخ اش این است که این کار ناگزیر است. امروزه هر بیت منطقی صفر در یک بیت فیزیکی صفر مثل دامنه موج الکترومغناطیسی که اصولا ماکروسکوپی است، بارگذاری می شود. به زودی به مرحله ای می رسیم که می توانیم با بارگذاری یک بیت منطقی در یک بیت فیزیکی میکروسکوپی مثل یک فوتون بارگذاری شود. در چنین شرایطی طبیعتا بسته موج فوتون ها هنگام عبور از کانال پخش شده و با یکدیگر همپوشانی پیدا خواهند کرد و تعامد آنها از بین می رود.

از طرف دیگر ممکن است بخواهیم حالت های کوانتومی ای را که حاصل یک محاسبه در یک کامپیوتر کوانتومی هستند از طریق یک کانال کوانتومی (یک فیبر نوری یا زنجیره ای از یونها یا اتمها) به یک کامپیوتر کوانتومی دیگر منتقل کنیم. در این حالت هدف ما ارسال پیام های کلاسیک از طریق بارگذاری آن پیام ها در حالت های کوانتومی نیست بلکه ارسال خود حالت های کوانتومی است که الزاماً هم بر هم عمود نیستند. در این صورت از ظرفیت کوانتومی یک کانال کوانتومی حرف می زنیم.

در هر دوی این روش ها ممکن است فرستنده (آلیس) و گیرنده (باب) به ذخیره ای از تعداد دلخواه حالت های درهم تنیده مشترک بین خود دسترسی داشته باشند که از آنها برای مخابره اطلاعات کلاسیک یا کوانتومی استفاده کنند. فرایند کدگذاری چگال نمونه ای از استفاده از حالت های درهم تنیده برای مخابره اطلاعات کلاسیک و فرابرد کوانتومی نمونه ای از این استفاده برای مخابره حالت های کوانتومی است. در حالت اول از ظرفیت درهمتنیده کلاسیک و در حالت دوم از ظرفیت درهم تنیده کوانتومی [۴] نام می بریم. بنابراین با توجه به این که چه نوع حالت هایی را ارسال می کنیم و چه منابعی (نظیر درهم تنیدگی) در اختیار داریم، ظرفیت های مختلفی را می توان برای یک کانال کوانتومی تعریف کنیم. در این فصل نخست ظرفیت کلاسیک یک کانال کلاسیک را معرفی کرده و شیوه محاسبه آن را توضیح می دهیم و سپس به تعریف و محاسبه ظرفیت های دیگر خواهیم پرداخت.

---

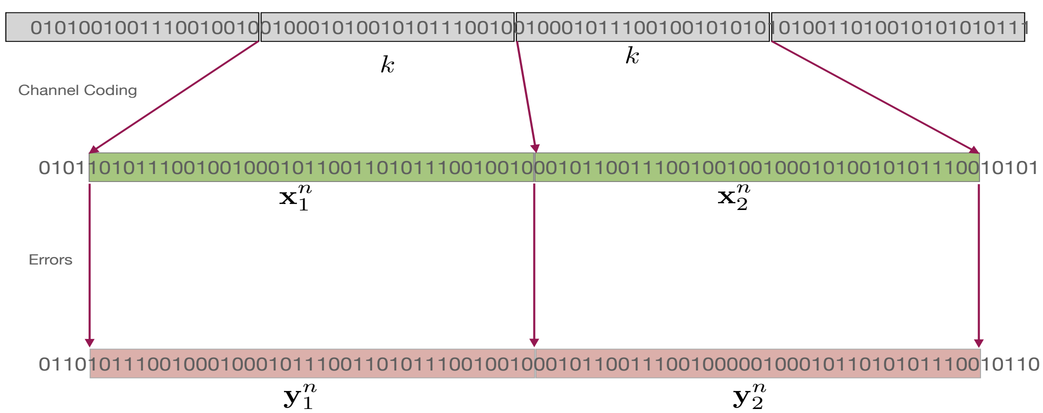
[۴] Entanglement-assisted quantum capacity of quantum channel

۲ یادآوری: ظرفیت کلاسیک یک کانال کلاسیک

کانال کلاسیک را کانالی می گیریم که رو بیت های (دوحالته) عمل می کند. این کانال با احتمالات شرطی $P(y|x)$ تعریف می شود، که نشان میدهد این کانال با چه احتمالی یک حرف $x \in \{0,1\}$ را به یک حرف دیگر مثل $y \in \{0,1\}$ تبدیل می کند. هدف یک مخابره کوانتومی این است که رشته هایی به طول k بیت را از این کانال عبور دهد و سالم به مقصد برساند. یک منبع بخصوص (یک متن، یک صدا یا یک تصویر) را می توان مجموعه ای از این رشته ها گرفت که هر کدام با احتمالات مشخص صادر می شوند. این مجموعه یا منبع ورودی [۵] را به صورت زیر نشان می دهیم: $\mathbf{X} = \{X \in 0,1^k, p_x\}$ هر رشته از بیت های صفر و یک تشکیل شده است:

$$X = x_1 x_2 \cdots x_k, \tag{۱}$$

طول این رشته ها معمولا بزرگ است. به یاد بیاورید که ما همواره کدگذاری را روی بلوک های بزرگ انجام می دهیم. شکل (۱). در مقصد هر



شکل ۱: در حد تئوریک همواره بلوک های بسیار بزرگ k بیتی به بلوک های بسیار بزرگ n بیتی کد شده و به کانال ارسال می شود.

رشته به دلیل خطاهای موجود در کانال به یک رشته دیگر مثل $Y = y_1 y_2 \cdots y_k$ تبدیل می شود. برای اینکه پیام ها سالم به مقصد برسند، می

[۵] Input Source

بایست آنها را در رشته های بزرگ تر بارگذاری کنیم. بنابراین در ابتدا یک نگاشت کدگذاری [۶]

$$E:\{0,1\}^k \longrightarrow \{0,1\}^n$$

صورت می گیرد و در مقصد هم پس از تشخیص و تصحیح خطاها یک نگاشت کدگشایی [۷]

$$D:\{0,1\}^n \longrightarrow \{0,1\}^k$$

صورت می گیرد تا احتمال خطا به کمترین مقدار ممکن برسد. نرخ مبادله پیام برای این منبع خاص چنین تعریف می شود:

$$R(\mathbf{X}) := \lim_{n\longrightarrow\infty}\frac{k}{n} \qquad d(Y,X)\leq\epsilon \quad \forall\, X\in\mathbf{X}. \tag{۲}$$

سوال این است که آیا یک رابطه تحلیلی برای محاسبه این ظرفیت وجود دارد یا نه؟ کمی بعد نشان می دهیم که پاسخ این سوال مثبت است یعنی یک رابطه ساده برای این ظرفیت وجود دارد و برابر است با:

$$C = \underset{x}{Max} I(x;y) = \underset{x}{Max}\Big[H(x)+H(y)-H(x,y)\Big] \qquad x,\ y\in\{0,1\}. \tag{۳}$$

نکته مهم این است که عبارت طرف راست برای یک حرف محاسبه می شود و نه برای رشته های بلند. این یک ساده سازی بسیار بزرگ است که برای محاسبه ظرفیت کانال های کلاسیک رخ داده است و معمولا برای ظرفیت کانال های کوانتومی رخ نمی دهد.

■ **مثال: ظرفیت یک کانال متقارن** یک کانال متقارن و احتمالات آن در شکل (۲) نشان داده شده است. برای این کانال داریم:

$$P(1|0)=P(0|1)=q, \qquad P(0|0)=P(1|1)=1-q.$$

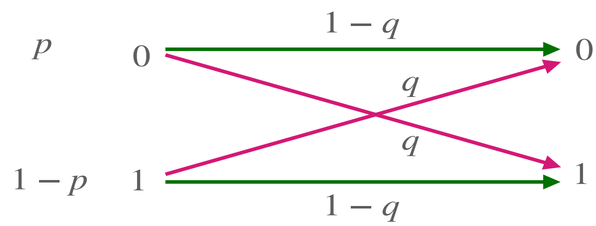
در نتیجه برای ورودی های

$$X=\{P(0)=(p),\ P(1)=1-p\}$$

بدست می آوریم

$$Y=\{P(0)=p(1-q)+(1-p)q\ ;\ \ P(1)=(1-p)(1-p)+pq\} \tag{۴}$$

[۶] Encoding
[۷] Decoding



شکل ۲: یک کانال متقارن و احتمالات ورودی ها و احتمالات خطای روی هر بیت. با دنبال کردن فلش ها و این احتمالات می توان احتمالات هر بیت خروجی را حساب کرد و به رابطه (۴) رسید.

و

$$(X,Y) = \{P(0,0) = p(1-q); P(0,1) = q(1-p), P(1,0) = qp, P(1,1) = (1-p)(1-q)\} \qquad (۵)$$

در نتیجه پس از کمی ساده کردن بدست می آوریم:

$$\begin{aligned} I(X:Y) &= H(X)+H(Y)-H(X,Y) = p\log p + (1-p)\log(1-p) + q\log q + (1-q)\log(1-q) \\ &- (p+q-2pq)\log(p+q-2pq) - (1-p-q+2pq)\log(1-p-q+2pq). \qquad (۶) \end{aligned}$$

این عبارت ماکزیمم خود را در نقطه ای پیدا می کند که شرط زیر برقرار باشد:

$$\frac{\partial I(X:Y)}{\partial p} = 0 \qquad (۷)$$

که معادل است با

$$\log\frac{p}{1-p} + (1-2q)\log\frac{1-p-q+2pq}{p+q-2pq} = 0. \qquad (۸)$$

شرط بالا در نقطه $p = \frac{1}{2}$ محقق می شود که در نتیجه خواهیم داشت:

$$C = Max_p I(X:Y) = I(X:Y)|_{p=\frac{1}{2}} = 1 + q\log q + (1-q)\log(1-q). \qquad (۹)$$

براحتی می توانیم خود را قانع کنیم که این تابع در شرایط مختلف یعنی مقادیر مختلف q همان رفتاری را دارد که از آن انتظار داریم.

■ **مثال: ظرفیت یک کانال با خروجی های ناهمپوشان** کانال کلاسیک نشان داده شده در شکل (۳) در نظر بگیرید. الفبای ورودی این کانال $X = \{0,1\}$ و الفبای خروجی آن رشته های دوتایی هایی به شکل $Y = \{00, 01, 10, 11\}$ است. کانال با احتمالات شرطی نشان داده شده تعریف شده است. با وجود اینکه به نظر می رسد، خروجی های کانال همه تصادفی هستند، اما به دلیل ناهمپوشانی خروجی ها همواره با دریافت هر رشته دوتایی به صورت دقیق تعیین کرد که ورودی چه بوده است. بنابراین ظرفیت این کانال یک بیت به ازای هر بار استفاده از کانال است، یعنی $C = 1$. این نتیجه را می توان با محاسبه اطلاعات متقابل هم بدست آورد. می نویسیم:

$$I(X:Y) = H(X) - H(X|Y) \qquad (۱۰)$$

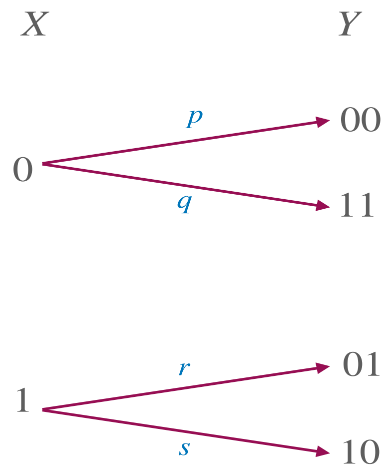
اما $H(X|Y)$ برابر با صفر است، زیرا با دانستن هر حرف خروجی $y \in Y$ به طور دقیق می توانیم بفهمیم که x چه بوده است و هیچ نوع عدم یقینی در X باقی نمی ماند. (در واقع

$$p(x|y) = 1 \quad \forall\, x,\ y.$$

) بنابراین ظرفیت برابر است با:

$$C = Max_X H(X) = 1. \qquad (۱۱)$$

■ **مثال: ظرفیت یک کانال با خروجی های دوره ای** کانال کلاسیک نشان داده شده در شکل (۴) در نظر بگیرید. الفبای ورودی این کانال $X = \{A, B, C, D, \cdots, \cdots, Z\}$ و الفبای خروجی آن نیز با الفبای ورودی آن یکسان است. $Y = \{A, B, C, D, \cdots, \cdots, Z\}$ است. کانال با احتمالات شرطی نشان داده شده تعریف شده است. هر حرف با احتمال مشخصی بدون خطا به مقصد می رسد و با متمم آن به حرف بعدی تبدیل می شود. اگر چنین خطایی وجود نمی داشت، ظرفیت این کانال برابر می شد با $C = \log_2 26,$ چرا که در هر بار استفاده از کانال می توانستیم یکی از ۲۶ حرف الفبا را بدون هیچ گونه خطایی به مقصد ارسال کنیم. در واقعی با با دریافت هر حرف $y \in Y$ هیچ ابهامی در مورد حرف ارسال شده $x \in X$ وجود نمی داشت که به این معنا می بود که $H(X|Y) = 0$. در نتیجه ظرفیت



شکل ۳: هر حرف با یک احتمال مثلا p به خود آن حرف و با احتمال $1-p$ به حرف بعدی تبدیل می شود.

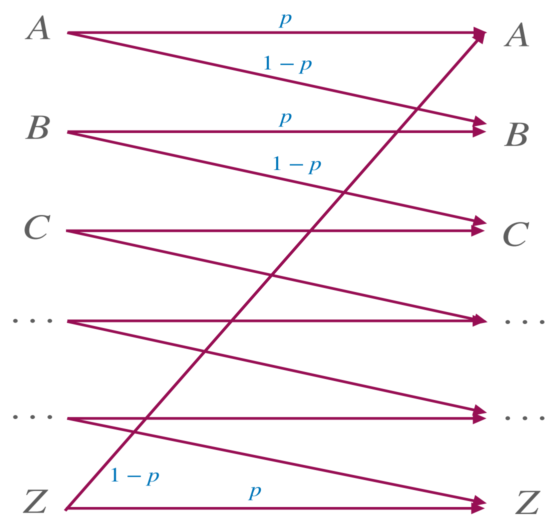
برابر می شد با:

$$C = Max_X\Big[H(X) - H(X|Y)\Big] = MaxH(X) = \log 26. \qquad (۱۲)$$

اما حال که خطای دوره ای وجود دارد آلیس می تواند به گونه دیگری کدگذاری کند تا بازهم بتواند از این کانال برای ارسال پیام های خود استفاده کند. کافی است که او الفبای کوچکتری را مطابق شکل (۵) استفاده کند. الفبای ورودی او حالا تنها از ۱۳ حرف تشکیل شده که توسط باب بدون ابهام از یکدیگری قابل تمیز هستند. در نتیجه با همان استدلال بالا ظرفیت کانال برابر خواهد شد با $C = \log_2 13$. این ظرفیت مستقل از این است که در کانال هر حرفی با چه احتمالی به خود آن حرف و با چه احتمالی به حرف بعدی تبدیل می شود.

۳ ظرفیت کلاسیک یک کانال کوانتومی

ممکن است از یک کانال کوانتومی برای مبادله اطلاعات کلاسیک استفاده کنیم. برای این کار رشته بیت های کلاسیک را در حالت های کوانتومی متعامد کد می کنیم و می فرستیم. اگر هیچگونه نوفه ای در بین راه وجود نداشته باشد، این حالت های کوانتومی سالم به مقصد می



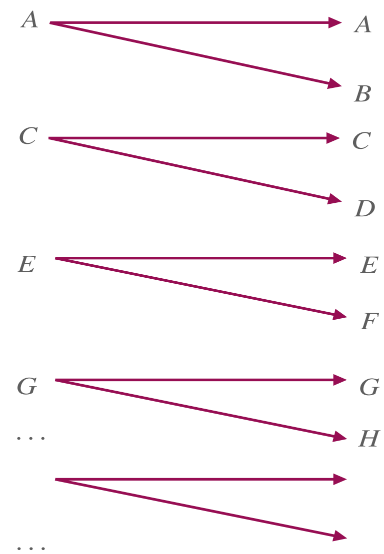
شکل ۴: هر حرف با یک احتمال سالم به مقصد می رسد و با احتمال متمم آن به حرف بعدی تبدیل می شود.

رسند و در آنجا به رشته بیت های کلاسیک بازگشایی می شود. ممکن است پرسیده شود چه دلیلی برای ارسال پیام های کلاسیک از یک کانال کوانتومی وجود دارد. پاسخ اش این است که این امر ممکن است ناگزیر باشد. در واقع می توانیم برای ارسال سریع تر و فشرده تر اطلاعات بیت های کلاسیک را در فوتون ها بارگذاری کرده و آنها را پشت سر هم از یک فیبر کوانتومی به جایی بفرستیم تا در هر ثانیه اطلاعات هر چه بیشتری به مقصد ارسال کنیم. در این صورت فوتون ها که ذرات میکروسکوپی کوانتومی هستند حامل اطلاعات خواهند بود و بیت های کلاسیک سوار بر ذرات کوانتومی از یک کانال کوانتومی عبور خواهند کرد. در حالت کلی البته، کانال دارای نوفه است و حالت های کوانتومی ای که در ابتدا متعامد بودند هنگام عبور از کانال دچار همپوشانی شده و دیگر متعامد نخواهند بود. در مقصد می بایست با اندازه گیری های مناسب بتوانیم تا حد امکان این حالت ها را که دیگر متعامد و در نتیجه تمیزپذیر نیستند، آنها را از هم تشخیص دهیم. می دانیم که بیشترین مقدار اطلاعی که می توانیم از این حالت ها بدست آوریم توسط کمیت هوله و داده می شود. به عبارت دیگر می دانیم که هرگاه آلیس آنزامبلی از حالت ها مثل $\{p_i,\rho_i\}$ را برای باب بفرستد، حداکثر اطلاعاتی که باب می تواند از چیستی حالت های فرستاده شده بدست آورد برابر است با:

$$\chi(\{p_i,\rho_i\}) = S(\sum_i p_i\rho_i) - \sum_i p_i S(\rho_i) \qquad (۱۳)$$

حال اگر آلیس الفبای کلاسیک $\{p_i,x_i\}$ را در آنزامبل

$$\{p_i,\rho_i\} = \{p_i,|\psi_i\rangle\langle\psi_i|\} \qquad \langle\psi_i|\psi_j\rangle = \delta_{i,j}$$



شکل ۵: آلیس با محدود کردن دایره الفبای خود می تواند پیام هایش را بدون خطا به باب ارسال کند. اما طبیعتا نرخ مخابره اش و در نتیجه ظرفیت کانال پایین آمده نصف می شود.

بارگذاری کرده باشد، و این حالت ها از یک کانال نوفه دار به باب رسیده باشد،آنگاه ماکزیمیم اطلاعات قابل حصول توسط باب برابر خواهد بود با:

$$\chi(\{p_i,\mathcal{E}(\rho_i)\}) = S(\sum_i p_i\mathcal{E}\rho_i) - \sum_i p_i S(\mathcal{E}(\rho_i)) \tag{۱۴}$$

بنابراین ظرفیت کانال $\mathcal{E}$ برابر خواهد شد با:

$$C(\mathcal{E}) := \underset{p_i,\rho_i}{Max}\,\chi(\{p_i,\mathcal{E}(\rho_i)\}) \tag{۱۵}$$

به یک نکته مهم می بایست توجه کنیم و آن اینکه این تعریف برای وقتی است که آلیس هر حرف الفبا را در یک حالت کوانتومی کد می کند و به باب ارسال می کند. اما آلیس این آزادی را دارد که رشته های بزرگ با طول دلخواه را به حالت های کوانتومی کد کرده و به باب ارسال کند و در مقصد نیز باب آن ها را تبدیل به رشته بیت های کلاسیک کند. در واقع آلیس و باب می توانند فرایند زیر را انجام دهند:

$$M \xrightarrow[Encoding]{\text{Alice}} |\Psi^n(M)\rangle \xrightarrow[Transmission]{\text{Channel}} \mathcal{E}^{\otimes n}(|\Psi(M)\rangle) \xrightarrow[Decoding]{\text{Bob}} M \tag{۱۶}$$

که در آن M یک رشته طولانی به طول k و $|\Psi^n(M)\rangle$ یک حالت n کیوبیتی است که رشته M در آن کد شده است.

بنابراین اگر بخواهیم دقیق باشیم، : ظرفیت کلاسیک یک کانال کوانتومی را به صورت زیر می بایست تعریف کنیم:

$$C(\mathcal{E}) := \lim_{n\longrightarrow\infty} \frac{C(\mathcal{E}^{\otimes n})}{n} \tag{۱۷}$$

تا مدتها تصور می شد که ظرفیت کلاسیک یک کانال کوانتومی یک کمیت جمع پذیر [۸] است، به این معنا که

$$C(\mathcal{E}^{\otimes n}) = nC(\mathcal{E}),$$

که اگر چنین می بود نیازی به محاسبه حد بالا که بی نهایت هم مشکل است وجود نمی داشت. در واقع فکر می شد که بارگذاری پیام های کلاسیک در حالت های درهم تنیده و ارسال این حالت ها از کانال کمکی به افزایش ظرفیت نمی کند، اما در سال ۲۰۰۹ معلوم شد که این انتظار درست نیست. مسئله محاسبه دقیق ظرفیت به شکلی که در رابطه (۱۷) آمده است، همچنان حل ناشده باقی مانده است. اما محاسبه ظرفیت به شکلی که در رابطه (۱۵) آمده است، برای کانال های کوانتومی امکان پذیر است. این ظرفیت که به آن ظرفیت ضربی [۹] یا ظرفیت تک حرفی [۱۰] نیز گفته می شود، بر این فرض استوار است که آلیس همه رشته ها را در حالت های ضربی بارگذاری کرده و ارسال می کند. از این پس هر گاه از ظرفیت کلاسیک یک کانال حرف می زنیم منظورمان همین ظرفیت ضربی است. اکنون به مطالعه چند مثال می پردازیم.

- **مثال: ظرفیت کلاسیک کانال واقطبش در بعد دلخواه.** کانال واقطبش در بعد دلخواه به صورت زیر تعریف می شود:

$$\mathcal{E}_p(\rho) = (1-p)\rho + pTr(\rho)\frac{I}{d} \tag{۱۸}$$

همانطور که در رابطه (۱۵) دیده می شود، در محاسبه ظرفیت کلاسیک، مشکل اصلی پیدا کردن یک آنزامبل از حالت هایی است که قرار است کمیت هوله و رو بیشینه کنند. یک آنزامبل می تواند به تعداد دلخواهی،شمارش پذیر یا بی نهایت عضو داشته باشد. مسئله اصلی در مورد هر کانال این است که چنین آنزامبلی را چگونه باید پیدا کنیم. برای کانال های ساده می توان با سعی و خطا یا استفاده از تقارن های کانال این آنزامبل را پیدا کرد. بخصوص در بعضی از کانال ها می توان بلافاصله آنزامبلی را پیدا کرد که جمله نخست کمیت هوله و را به مقدار حداکثر آن یعنی $S(\frac{I}{d}) = \log_2 d$ برسانند. در این صورت تنها کاری که باقی می ماند این است که از این دسته آنزامبل ها، آن آنزامبلی را یافت که جمله دوم را کمینه کند. دقت کنید که این تفکیک بیشینه کردن کمیت هوله و به دو مسئله مجزا یعنی (بیشینه کردن جمله اول و کمینه کردن جمله دوم) تنها در صورتی قابل قبول است که جمله اول به مقدار بیشینه مطلق خود رسیده باشد. پس از این

[۸] Additive
[۹] Product Capacity
[۱۰] One-Shot Capacity

مقدمات به محاسبه ظرفیت کانال واقطبش در بعد دلخواه می پردازیم. نخست توجه می کنیم که این کانال یک تقارن جالب و مهم دارد، یا به اصطلاح دارای خاصیت هموردایی است:

$$\mathcal{E}(g\rho g^\dagger) = g\mathcal{E}g^\dagger \qquad \forall\ g \in SU(d). \tag{۱۹}$$

گروه $SU(d)$ البته یک گروه پیوسته است ولی برای هر گروهی (چه پیوسته و چه گسسته) می توانیم از هموردایی استفاده کنیم و آنزامبل زیر را تشکیل دهیم:

$$p_i = \frac{1}{|G|}, \qquad \rho_i = g_i\rho_0 g_i^\dagger \tag{۲۰}$$

که در آن ρ_0 یک حالت معین است که می بایست بعدا تعیین شود. در این رابطه $|G|$ تعداد اعضای گروه است. در مورد گروه های پیوسته ρ به صورت یک انتگرال نوشته می شود و $|G|$ حجم گروه خواهد بود. آنزامبلی که انتخاب کرده ایم منجر به ماتریس چگالی زیر برای قرار دادن در جمله اول کمیت هوله و می شود:

$$\rho \equiv \frac{1}{|G|}\sum_i g_i\rho_0 g_i^\dagger \tag{۲۱}$$

در این جا از یک قضیه در نظریه گروه یعنی لم شور [۱۱] استفاده می کنیم که بر مبنای آن هر ماتریس که با تمام نمایش های کاهش ناپذیر یک گروه جابجا شود، متناسب با ماتریس واحد است.

- **تمرین:** نشان دهید که ماتریس چگالی تعریف شده در (۲۱) در شرایط لم شور صدق می کند و بنابراین

$$\rho = \frac{1}{d}I. \tag{۲۲}$$

در نتیجه خواهیم داشت

$$C_{cl}(\mathcal{E}_p) = Max_{\rho_0}\Big[S(\frac{I}{d}) - \sum_i \frac{1}{|G|}S(\mathcal{E}(g_i\rho_0 g_i^\dagger))\Big] \tag{۲۳}$$

و با توجه به خاصیت هموردایی

$$C_{cl}(\mathcal{E}_p) = \log d - Min_{\rho_0}S(\mathcal{E}(\rho_0)) \tag{۲۴}$$

[۱۱] Shur's Lemma

باز هم با توجه به خاصیت هموردایی می توانیم ρ_0 را یک حالت خالصِ مشخص مثل $|0\rangle\langle 0|$ بگیریم. در این صورت خواهیم داشت:

$$\mathcal{E}_p(|0\rangle\langle 0|) = Diagonal(1-p+\frac{p}{d}, \frac{p}{d}, \frac{p}{d}, \cdot, \cdot, \cdot \frac{p}{d}) \qquad (۲۵)$$

و در نتیجه

$$C_{cl}(\mathcal{E}_p) = \log_2 d + (1-p+\frac{p}{d})\log_2(1-p+\frac{p}{d}) + \frac{d-1}{d} p \log_2 \frac{p}{d}. \qquad (۲۶)$$

از این رابطه می توان در حالت های حدی زیر ظرفیت کانال را فهمید که با انتظار شهودی ما نیز مطابقت می کند.

$$C_{cl}(\mathcal{E}_{p=0}) = \log_2 d, \qquad C_{cl}(\mathcal{E}_{p=1}) = 0. \qquad (۲۷)$$

- **مثال: ظرفیت کلاسیک کانال فازبرگردان کیوبیتی** تعریف کانال به شکل زیر است:

$$\mathcal{F}_p(\rho) = (1-p)\rho + pZ\rho Z \qquad (۲۸)$$

برای این کانال سعی می کنیم آنزامبل را با سعی و خطا پیدا کنیم. دو حالت هر کدام با احتمال $\frac{1}{2}$ در نظر می گیریم:

$$\rho_+ = \frac{1}{2}(I + \mathbf{n}\cdot\boldsymbol{\sigma}) \qquad \rho_- = \frac{1}{2}(I - \mathbf{n}\cdot\boldsymbol{\sigma}) \qquad (۲۹)$$

که در آن $\mathbf{n}$ یک بردار یکه است که بعدا باید مشخص شود. می دانیم که

$$\frac{1}{2}\rho_+ + \frac{1}{2}\rho_- = \frac{1}{2}I \qquad (۳۰)$$

عمل کانال روی این حالت ها به شکل زیر است:

$$\mathcal{F}_p(\rho_\pm) = \frac{1}{2}(I \pm \mathbf{r}\cdot\boldsymbol{\sigma}), \qquad \mathbf{r} = ((1-2p)x,\ (1-2p)y,\ z) \qquad (۳۱)$$

در نتیجه خواهیم داشت:

$$C_{cl}(\mathcal{F}_p) = \Big[S(\frac{I}{2}) - Min_{\mathbf{n}} S(\mathcal{E}(\frac{1}{2}(I+\mathbf{n}\cdot\boldsymbol{\sigma}))\Big] \qquad (۳۲)$$

جمله دوم وقتی کمینه خواهد شد که اندازه بردار $\mathbf{r}_+$ بیشترین مقدار را اختیار کند. اندازه این بردار برابر است با:

$$r_+^2 = (1-2p)^2 + (1-(1-2p)^2)z^2 \tag{۳۳}$$

و بیشترین مقدار آن وقتی حاصل می شود که $z=1$ باشد، که در این صورت $r_+=1$ خواهد شد. در نتیجه ظرفیت کانال برابر با یک بیت بر هر بار استفاده خواهد شد. یعنی ظرفیت این کانال با ظرفیت کانال بدون نوفه برابر است. دلیل این امر هم خیلی روشن است چون آلیس می تواند برای مخابره اطلاعات کلاسیک از حالت های متعامد $\{|0\rangle, |1\rangle\}$ استفاده کند که اتفاقا حالت های ناوردای کانال هم هستند و سالم از کانال عبور می کنند.

■ **تمرین:** با استفاده از روشی مشابه روش تمرین قبلی، ظرفیت کلاسیک کانال کوانتومی زیر را محاسبه کنید:

$$\Lambda(\rho) = (1-2p)\rho + pX\rho X + pY\rho Y. \tag{۳۴}$$

پاسخ:

$$C(\Lambda) = \begin{cases} 1 + p\log_2 p + (1-p)\log_2(1-p), & 0 \le p \le \frac{1}{3} \\ 1 + 2p\log_2(2p) + (1-2p)\log_2(1-2p), & \frac{1}{3} \le p \le 1 \end{cases}$$

۴ کانال مکمل

محاسبه ظرفیت های دیگرِ یک کانال کوانتومی وقتی امکان پذیر می شود که با مفهومی جدید به نام کانال مکمل آشنا شویم. مفهوم کانال مکمل [۱۲] در محاسبه ظرفیت های یک کانال کوانتومی نقش اساسی دارد. می دانیم که یک کانال کوانتومی $\Lambda : L(H_A) \longrightarrow L(H_A)$ را می توان با استفاده از قضیه انبساط اشتاین اشپرینگ به صورت زیر در نظر گرفت:

$$\Lambda(\rho) = Tr_B\Big[U(\rho\otimes|0\rangle\langle 0|)U^\dagger\Big] \tag{۳۵}$$

[۱۲] Complementary Channel

که در آن $\rho \in L(H_A)$ و $|0\rangle\langle 0| \in L(H_B)$ یک حالت مرجع است. در این رابطه U یک عملگر یکانی است که روی $H_A \otimes H_B$ عمل می کند. کانال مکمل به سادگی تعریف می شود. کافی است که به جای سیستم B روی A رد بگیریم. در این صورت نگاشت $\Lambda^c : L(H_A) \longrightarrow L(H_B)$ درست خواهد شد که آن را مکمل کانال اولیه می خوانیم.

■ **تمرین:** نشان دهید که اگر اگر کانال Λ رد نگه دار باشد، کانال متمم آن یعنی Λ^c نیز ردّ نگه دار است.

$$\Lambda^c(\rho) = Tr_A\Big[U(\rho \otimes |0\rangle\langle 0|)U^\dagger\Big] \tag{۳۶}$$

با استفاده از تعریف فوق می توان عملگرهای کراوس را برای کانال مکمل بدست آورد. برای کانال Λ می دانیم که

$$\Lambda(\rho) = \sum_\mu A_\mu \rho A_\mu^\dagger \tag{۳۷}$$

$$(A_\mu)_{ij} = \langle i, \mu|U|j, 0\rangle \tag{۳۸}$$

در این صورت با توجه به رابطه (۳۶) دیده می شود که

$$\Lambda^c(\rho) = \sum_\mu K_i \rho K_i^\dagger \tag{۳۹}$$

که در آن

$$(K_i)_{\mu,j} = \langle i, \mu|U|j, 0\rangle. \tag{۴۰}$$

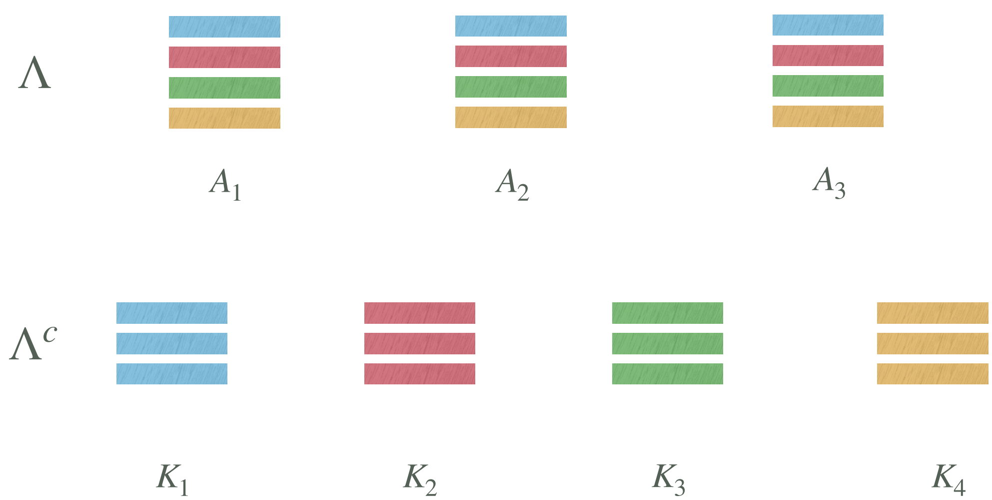
از این روابط و با کمی محاسبه براحتی ارتباط بین عملگرهای کراوس معلوم خواهد شد. این رابطه به شکل زیر است:

$$(K_i)_{\mu,j} = (A_\mu)_{i,j} \tag{۴۱}$$

این رابطه تعبیر خیلی ساده ای دارد. برای فهم این تعبیر بیایید K_1 را حساب کنیم: داریم

$$(K_1)_{\mu,j} = (A_\mu)_{1,j}. \tag{۴۲}$$

حال این رابطه به سادگی می گوید که سطر μ امِ ماتریس K_1 چیزی نیست جز سطر اول ماتریس A_μ. است. بنابراین ماتریس K_1 از سطرهای اول همه ماتریس های کراوس اولیه ساخته می شود. به همین ترتیب ماتریس K_2 از سطر های دوم همه ماتریس های کراوس اولیه ساخته می شود و الی آخر. این رابطه در شکل (۶) به سادگی نشان داده شده است.



شکل ۶: شیوه ساده ای برای تشکیل عملگرهای کراوس کانال مکمل از عملگرهای کراوس کانال اصلی. سطرهای اول ماتریس های کراوس برای کانال اصلی عملگر K_1 را تشکیل می دهد، سطرهای دوم عملگر K_2 را تشکیل می دهد و الی آخر.

■ **ایزومتری** هرگاه $\Lambda : L(H_A)^+ \longrightarrow L(H_A)^+$ یک کانال کوانتومی با عملگرهای کراوس $i = 1 \cdots n \quad K_i,$ باشد، می توانیم متناظر با آن یک نگاشت ایزومتری

$$U : H_A \longrightarrow H_A \otimes H_B$$

به صورت زیر تعریف کنیم که در آن H_B یک فضای هیلبرت n بعدی است:

$$U|\psi\rangle := \sum_i K_i|\psi\rangle \otimes |i\rangle. \qquad (۴۳)$$

■ **تمرین:** الف: نشان دهید که این نگاشت واقعا یک ایزومتری است، یعنی

$$\langle\psi|U^\dagger U|\phi\rangle = \langle\psi|\phi\rangle.$$

هم چنین نشان دهید که اثر این نگاشت روی حالت های آمیخته به صورت زیر است:

$$U : \rho \longrightarrow \sum_{i,j} K_i\rho K_j^\dagger \otimes |i\rangle\langle j|. \qquad (۴۴)$$

واضح است که اگر روی فضای دوم ردّ را محاسبه کنیم بدست می آوریم:

$$\Lambda(\rho) = \sum_i K_i \rho K_i^\dagger, \tag{۴۵}$$

و اگر از همین نگاشت روی فضای اول ردّ را محاسبه کنیم، بدست می آوریم:

$$\Lambda^c(\rho) = \sum_{i,j} Tr(K_i \rho K_j^\dagger) |i\rangle\langle j|. \tag{۴۶}$$

به این ترتیب، این نگاشت، ماتریس چگالی را به فضای دوم می نگارد. تمرین زیر نشان می دهد که این تعریف با تعریف قبلی یکسان است.

■ **تمرین:** با محاسبه عملگرهای کراوس برای نگاشت (۴۶) نشان دهید که به همان نتیجه (۴۱) می رسید.

■ **مثال:**

کانال زیر را در نظر بگیرید:

$$\mathcal{E}_0(\rho) = Tr(\rho)\frac{I}{d} \tag{۴۷}$$

عملگرهای کراوس این کانال به شکل زیر یافته می شود:

$$\mathcal{E}_0(\rho) = \frac{1}{d}\sum_{i,j} \langle i|\rho|i\rangle |j\rangle\langle j| \tag{۴۸}$$

در نتیجه

$$\mathcal{E}_0(\rho) = \frac{1}{d}\sum_{i,j} |j\rangle\langle i|\rho|i\rangle\langle j| \tag{۴۹}$$

به این ترتیب عملگرهای کراوس این کانال با دو اندیس مشخص می شوند:

$$\mathcal{E}_0(\rho) = \sum_{i,j} A_{ij} \rho A_{ij}^\dagger \tag{۵۰}$$

که در آن

$$A_{ij} = \frac{1}{\sqrt{d}} |j\rangle\langle i|. \tag{۵۱}$$

بنابراین

$$\mathcal{E}^c(\rho) = \sum_l K_l \rho K_l^\dagger, \qquad (۵۲)$$

که در آن

$$(K_l)_{ij,k} = (A_{ij})_{lk} = \frac{1}{\sqrt{d}} \delta_{jl} \delta_{ik} \qquad (۵۳)$$

■ **تمرین:** مولفه های ماتریس $\mathcal{E}^c(\rho)$ را حساب کنید و نشان دهید که

$$\mathcal{E}_0^c(\rho) = \frac{I}{d}(\rho \otimes I) \qquad (۵۴)$$

■ **تمرین:** به همین روش نشان دهید که

$$\mathcal{E}_U(\rho) = U\rho U^\dagger \qquad (\mathcal{E}_U)^c(\rho) = Tr(\rho) \qquad (۵۵)$$

این دو تمرین نشان می دهند که مکملِ مکمل یک کانال با خود آن کانال مساوی نیست یعنی

$$(\mathcal{E}^c)^c \neq \mathcal{E}. \qquad (۵۶)$$

■ **تمرین:** نشان دهید که

$$\mathcal{E}_\psi(\rho) = Tr(\rho)|\psi\rangle\langle\psi| \qquad \mathcal{E}_\psi^c(\rho) = \rho. \qquad (۵۷)$$

■ **مثال: مکمل کانال بیت-برگردان را در نظر می گیریم.**

$$\Lambda(\rho) = (1-p)\rho + p\sigma_x \rho \sigma_x \qquad (۵۸)$$

عملگرهای کراوسی آن به شکل زیر است:

$$A_0 = \begin{pmatrix} \sqrt{1-p} & 0 \\ 0 & \sqrt{1-p} \end{pmatrix} \qquad A_1 = \begin{pmatrix} 0 & \sqrt{p} \\ \sqrt{p} & 0 \end{pmatrix} \qquad (۵۹)$$

بنابراین عملگرهای کراوس کانال مکمل آن عبارت اند از:

$$K_0 = \begin{pmatrix} \sqrt{1-p} & 0 \\ 0 & \sqrt{p} \end{pmatrix} \qquad K_1 = \begin{pmatrix} 0 & \sqrt{1-p} \\ \sqrt{p} & 0 \end{pmatrix} \tag{۶۰}$$

یک محاسبه ساده نشان می دهد که این کانال به شکل زیر عمل می کند:

$$\Lambda^c \begin{pmatrix} a & b \\ b^* & c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1-p & \sqrt{p(1-P)}(b+b^*) \\ \sqrt{p(1-p)}(b+b^*) & p \end{pmatrix} \tag{۶۱}$$

۵ کانال های کاهش پذیر و پادکاهش پذیر

در بخش گذشته با متمم یک کانال کوانتومی آشنا شدیم در این بخش با نوعی از کانال کوانتومی آشنا می شویم که اصطلاحاً کانال کاهش پذیر خوانده می شود.

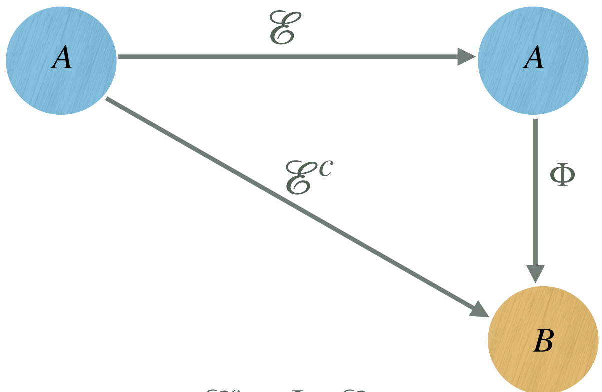
■ **تعریف:** یک کانال کوانتومی $\Lambda : A \longrightarrow B$ کاهش پذیر [۱۳] خوانده می شود، هرگاه یک کانال کوانتومی دیگر مثل Φ وجود داشته باشد که به طریق زیر این کانال را به متمم اش ربط دهد:

$$\Lambda^c = \Phi \circ \Lambda \tag{۶۲}$$

اصطلاحاً گفته می شود که این رابطه به معنای جابجایی بودن دیاگرام نشان داده شده در شکل (۷) است. برعکس یک کانال کوانتومی پادکاهش پذیر [۱۴] خوانده می شود، هرگاه یک کانال کوانتومی دیگر مثل Ψ وجود داشته باشد که به طریق زیر این کانال را به متمم اش ربط دهد:

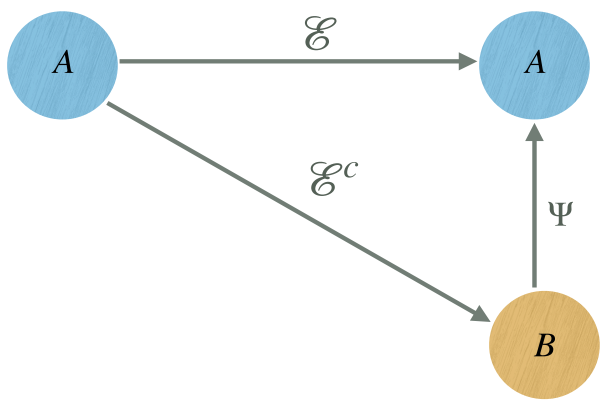
$$\Lambda = \Psi \circ \Lambda^c. \tag{۶۳}$$

[۱۳] Degradable
[۱۴] Anti-Degradable



$$\mathscr{E}^c = \Phi \circ \mathscr{E}$$

شکل ۷: یک کانال کوانتومی کاهش پذیر است هر گاه نگاشت کوانتومی دیگری مثل Φ وجود داشته باشد که دیاگرام بالا را جابجایی کند.



$$\mathscr{E} = \Psi \circ \mathscr{E}^c$$

شکل ۸: کاهش پذیر است هر گاه نگاشت کوانتومی دیگری مثل Ψ وجود داشته باشد که دیاگرام بالا را جابجایی کند.

از تعاریف (۶۲) و (۶۳) واضح است که یک کانال پادکاهش پذیر است اگر متمم آن کاهش پذیر باشد و برعکس. کاهش پذیر بودن یا پادکاهش پذیر بودن یک کانال کوانتومی خاصیتی استثنایی است، و تنها کانال های معدودی ممکن است در این دسته بندی جای بگیرند. مثال زیر را در

نظر می گیریم:

■ **مثال:** کانال کوانتومی زیر را در نظر می گیریم:

$$\Lambda_0(\rho) = Tr(\rho)\frac{I}{d} \tag{۶۴}$$

در بخش قبل دیدیم که متمم این کانال به شکل زیر است:

$$\Lambda_0^c(\rho) = \frac{I}{d}(\rho \otimes I) \tag{۶۵}$$

براحتی می توان دید که چنین کانالی کاهش پذیر است زیرا:

$$\Phi \circ \Lambda_0^c = \Lambda_0 \tag{۶۶}$$

که در آن

$$\Phi(X) = Tr_A(X). \tag{۶۷}$$

■ **مثال:** کانال کوانتومی زیر و متمم آن را در نظر می گیریم:

$$\mathcal{E}_\psi(\rho) = Tr(\rho)|\psi\rangle\langle\psi| \qquad \mathcal{E}_\psi^c(\rho) = \rho \tag{۶۸}$$

براحتی دیده می شود:

$$\mathcal{E}_\psi = \Phi \circ \mathcal{E}_\psi^c \tag{۶۹}$$

که در آن

$$\Phi(X) = Tr(X)|\psi\rangle\langle\psi| \tag{۷۰}$$

بنابراین، این کانال کاهش پذیر است.

بعد از تعریف این کانال ها به این پرسش می رسیم که فایده و اهمیت کاهش پذیر بودن یا نبودن یک کانال چیست؟ اهمیت این کانال ها در قضیه زیر معلوم می شود که ویژگی های مهم این کانال ها را وقتی که می خواهیم ظرفیت کوانتومی آنها را محاسبه کنیم، بدست می دهد. ظرفیت کوانتومی کانال موضوع بخش بعدی است. اما این قضیه را در این جا و بدون اثبات می آوریم:

■ **قضیه:** الف: هرگاه کانالی پادکاهش پذیر باشد، ظرفیت کوانتومی آن صفر است. ب: هرگاه کانال کاهش پذیر باشد، ظرفیت کوانتومی آن جمع پذیر است.

۶ ظرفیت درهم تنیده‌ـ کلاسیک یک کانال کوانتومی

کدگذاری چگال را در نظر بگیرید. در این روش آلیس و باب با استفاده از یک حالت درهم تنیده بیشینه مثل حالت بل که بین آنها به اشتراک گذاشته شده، می توانند پیام های کلاسیک بین هم مخابره کنند. با استفاده از هر حالت درهم تنیده، آلیس می توانند دو بیت به باب مخابره کند. در حالت ایده آل فرض این پروتکل این است که بین آلیس و باب یک کانال بدون نوفه،یعنی کانال واحد [۱۵] به صورت $\Lambda_0(\rho) = \rho$ به اشتراک گذاشته شده. با مصرف در هم تنیدگی به اشتراک گذاشته شده، ظرفیت این کانال برای مخابره اطلاعات کلاسیک دو بیت به ازای هر بار مصرف است. این نتیجه را با $C_E(\Lambda_0) = 2$ نشان می دهیم. در حالت کلی بین آلیس و باب می تواند یک کانال دلخواه وجود داشته باشد و تعداد حالت های درهم تنیده ی به اشتراک گذاشته شده می تواند دلخواه باشد. آلیس و باب هم چنان می توانند بهترین نوع کدگذاری و کدگشایی را به کار برده و پیام های کلاسیک را بین خود مخابره کنند و درهم تنیدگی به اشتراک گذاشته شده را مصرف کنند. این نوع ظرفیت، ظرفیت درهم‌ـتنیده کلاسیک یک کانال کوانتومی خوانده می شود. می توانیم آن را ظرفیت کلاسیک یک کانال با کمک درهم تنیدگی [۱۶] نیز بنامیم. نشان داده شده که این ظرفیت از رابطه زیر محاسبه می شود:

$$C_E(\Lambda) = Max_\rho \Big[S(\Lambda(\rho)) + S(\rho) - S(\Lambda^c(\rho)) \Big] \qquad (۷۱)$$

به عنوان اولین مثال می توانیم این نوع ظرفیت را برای کانال بدون نوفه حساب کنیم. برای این کانال می دانیم که

$$Id(\rho) = \rho \qquad Id^c(\rho) = Tr(\rho)$$

در نتیجه

$$\begin{aligned} C_E(\mathrm{Id}) &= Max_\rho \Big[S(\mathrm{Id}(\rho)) + S(\rho) - S(\mathrm{Id}^c(\rho)) \Big] \\ &= Max_\rho \Big[S(\rho) + S(\rho) - S(1) \Big] = 1 + 1 - 0 = 2. \end{aligned} \qquad (۷۲)$$

این همان نتیجه ای است که از قبل هم می دانیم زیرا با استفاده از یک حالت درهم تنیده و با دنبال کردن روش کدگذاری چگال می توانیم دو بیت کلاسیک را در هر بار استفاده از کانال مخابره کنیم.

---
[۱۵] identity channel

[۱۶] Entanglement-Assisted Classical Capacity of a Quantum Channel

برای یک کانال دلخواه محاسبه ظرفیت درهمتنیده ـ کلاسیک محتاج محاسبه ای کمی طولانی تر است، چرا که باید نخست کانال متمم آن را پیدا کرد و سپس بیشینه عبارت سمت راست معادله (۷۱) را روی همه حالت ها حساب کرد. این محاسبه با توجه به یک خاصیت خیلی مهم کمیت $I(\rho,\Lambda)\equiv S(\rho)+S(\Lambda(\rho)-S(\Lambda^c(\rho))$ آسان می شود. این خاصیت که آن را بدون اثبات بیان می کنیم چیزی نیست جز خاصیت تحدب $I(\rho,\Lambda)$ نسبت به ρ، یعنی:

$$\sum_i p_i I(\rho_i,\Lambda)\le I(\sum_i p_i\rho_i). \tag{۷۳}$$

این خاصیت به این معناست که حالت بیشینه برای این کمیت حالتی است با بیشینه آمیختگی، یعنی $\rho=\frac{I}{d}$. بنابراین ظرفیت کلاسیکـدرهمتنیده یک کانال به شکل زیر محاسبه می شود:

$$C_E(\Lambda)=S(\Lambda(\frac{I}{d})+S(\frac{I}{d})-S(\Lambda^c(\frac{I}{d}))). \tag{۷۴}$$

به این ترتیب هیچ نوع بهینه سازی برای محاسبه این نوع ظرفیت لازم نیست و تنها کافی است که کانال مکمل را محاسبه کرد.

- **مثال: ظرفیت کلاسیکـدرهم تنیده کانال بیتـبرگردان** با استفاده از رابطه (۶۱) که متمم کانال بیتـبرگردان را معرفی می کند، داریم:

$$S(\Lambda^c(\frac{I}{2}))=H(p) \tag{۷۵}$$

در نتیجه با استفاده از رابطه (۷۴) بدست می آوریم:

$$C_E(\Lambda)=S(\Lambda(\frac{I}{2})+S(\frac{I}{2})-S(\Lambda^c(\frac{I}{2})))=2-H(p). \tag{۷۶}$$

این رابطه نشان می دهد که برای کانال بدون نوفه ظرفیت کلاسیکـدرهمتنیده برابر با دو بیت است. این همان چیزی است که در فرایند کدگذاری چگال آموخته ایم. اما برای کانال کاملا نوفه دار، ظرفیت کلاسیکـدرهمتنیده برابر با یک بیت است.

- **تمرین:** در مثال بالا، وقتی که $p=\frac{1}{2}$ است و کانال کاملا نوفه دار است، همان فرایند کدگذاری چگال را به کار می بریم. آلیس و باب یک حالت درهم تنیده بیشینه به صورت $|\phi^+\rangle=\frac{1}{\sqrt{2}}(|00\rangle+|11\rangle)$ بین خود به اشتراک گذاشته اند. آلیس روی کیوبیت خودش یکی از عملگرهای یکانی I,X,Y,Z را اثر می دهد و سپس این کیوبیت را برای باب می فرستد. نشان دهید که آلیس به این ترتیب تنها می تواند یک بیت کلاسیک را به باب مخابره کند. به همین دلیل است که ظرفیتـدرهمتنیده کانال کاملا نوفه دار برابر با یک بیت است.

■ **مثال: ظرفیت کلاسیک‌ـ‌درهم تنیده کانال واقطبش:** کانال واقطبش چنین است.

$$\Lambda_p(\rho) = (1 - \frac{3p}{4})\rho + \frac{p}{4}\left(X\rho X + Y\rho Y + Z\rho Z\right) \tag{۷۷}$$

عملگرهای کراوس آن عبارت اند از:

$$A_0 = \alpha I, \quad A_1 = \beta X, \quad A_2 = \beta Y, \quad A_3 = \beta Z, \tag{۷۸}$$

که در آن

$$\alpha = \sqrt{1 - \frac{3p}{4}} \qquad \beta = \sqrt{\frac{p}{4}}. \tag{۷۹}$$

با استفاده از شکل (۶) که عملگرهای کراوس متمم کانال واقطبش را معرفی می کند، داریم:

$$\Lambda_p^c(\rho) = R_1\rho R_1^\dagger + R_2\rho R_2^\dagger, \tag{۸۰}$$

که در آن

$$R_1 = \begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \beta \\ 0 & -i\beta \\ \beta & 0 \end{pmatrix}, \quad R_2 = \begin{pmatrix} 0 & \alpha \\ \beta & 0 \\ i\beta & 0 \\ 0 & -\beta \end{pmatrix}. \tag{۸۱}$$

در نتیجه

$$\Lambda_p^c(\frac{I}{2}) = \frac{1}{2}\Big[R_1R_1^\dagger + R_2R_2^\dagger\Big] = \begin{pmatrix} \alpha^2 & & & \\ & \beta^2 & & \\ & & \beta^2 & \\ & & & \beta^2 \end{pmatrix}. \tag{۸۲}$$

حال می توانیم ظرفیت کلاسیک‌ـ‌درهمتنیده کانال واقطبش را محاسبه کنیم. می دانیم:

$$C_E(\Lambda_p) = S(\frac{I}{2}) + S(\Lambda(\frac{I}{2})) - S(\Lambda^c(\frac{I}{2})) \tag{۸۳}$$

که پس از کمی محاسبه به این جا خواهد رسید:

$$C_E(\Lambda_p) = 2 + (1 - \frac{3p}{4})\log_2(1 - \frac{3p}{4}) + 3\frac{p}{4}\log_2\frac{p}{4} \qquad (۸۴)$$

مشاهده می کنیم که

$$C_E(\Lambda_0) = 2, \qquad C_E(\Lambda_1) = 0. \qquad (۸۵)$$

هر دوی این نتایج حدی از نظر فیزیکی قابل فهم هستند.

۷ ظرفیت کوانتومی یک کانال کوانتومی

سومین نوع ظرفیتی که برای یک کانال کوانتومی تعریف می کنیم ظرفیت کوانتومی است. تاکنون می خواستیم از یک کانال کوانتومی برای ارسال پیام های کلاسیک استفاده کنیم و به همین دلیل نیز ظرفیت کلاسیک این کانال های کوانتومی را تعریف و محاسبه کردیم. اما یک کانال کوانتومی ممکن است برای ارسال یک حالت کوانتومی نیز به کار رود. به عنوان مثال ممکن است نتیجه یک محاسبه را که یک حالت کوانتومی است از طریق یک فیبر نوری از یک کامپیوتر کوانتومی به یک کامپیوتر کوانتومی دیگر منتقل کنیم. یا ممکن است بخواهیم مجموعه ای از حالت های کوانتومی را در یک حافظه کوانتومی ذخیره کرده و مدتی بعد آنها را بازیابی کنیم. در همه این موارد باید ظرفیت کوانتومی کانال کوانتومی را بشناسیم. این ظرفیت نشان خواهد داد که چه تعداد حالت ها ی کوانتومی را در کانال ذخیره کنیم و بدون اشتباه آنها را بازیابی کنیم. معنای عبارت «چه تعداد؟» نیز در این بخش روشن خواهد شد.

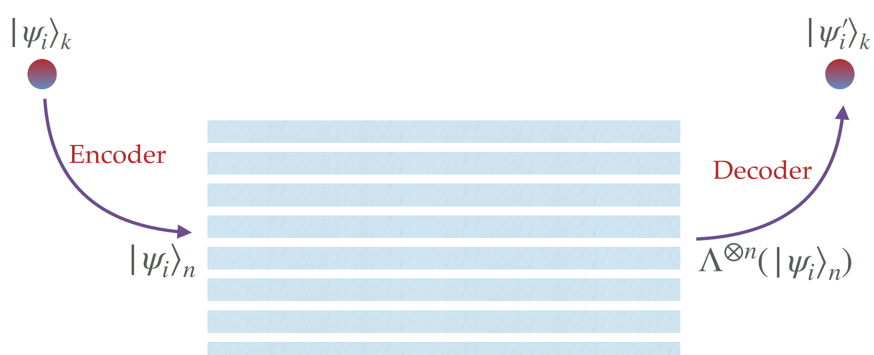
یک مجموعه از حالت های کوانتومی مشخص که احتمال صدور هر کدام از انها نیز معلوم است در نظر بگیرید. این مجموعه را با X نشان می دهیم:

$$X = \{p_i,\ |\psi_i\rangle \in C^{2^k}\} \qquad (۸۶)$$

هر کدام از این حالت ها در یک فضای 2^k بعدی قرار دارند. به عبارت دیگر هر کدام از این حالت ها، حالت های k کیوبیتی هستند. در حالت کلی این حالت ها درهم تنیده هستند. آلیس می خواهد این حالت ها را از یک کانال کوانتومی Λ به باب بفرستد. طبیعتاً کانالی که در اختیار اوست یک کانال تک کیوبیتی است و اگر خطایی هم در کار نبود، درست این بود که بگوییم این حالت ها از کانال $\Lambda^{\otimes k} = \Lambda \otimes \Lambda \otimes \cdots \Lambda$ به باب ارسال می شوند. اما کانال کوانتومی دارای خطاست و برای این که حالت ها صحیح و سالم به باب برسند، می بایست آنها را در حالت های بزرگتری کد گذاری کرد تا باب هم در مقصد آن را کدگشایی کرده و به حالت های اولیه برگرداند. به عبارت دقیقتر، نخست آلیس هر حالت k کیوبیتی $|\psi_i\rangle_k$ در یک مدار کد کننده E [۱۷] تبدیل به یک حالت n کیوبیتی $|\Psi_i\rangle_n$ می کند، و سپس این حالت را از کانال $\Lambda^{\otimes n}$ عبور می دهد. (یعنی کیوبیت ها را یک به یک از کانال Λ عبور می دهد) در مقصد حالت دریافت شده توسط باب یعنی $\Lambda^{\otimes n}(|\Psi_i\rangle_n)$ از یک مدار کدگشای D [۱۸] (شامل تشخیص خطا و تصحیح خطا) عبور می کند و تبدیل به حالت k کیوبیتی $|\psi'_i\rangle_k$ می شود. مجموعه ای از حالت ها که بدست باب می رسد برابر است با:

$$Y = \{p_i,\ |\psi'_i\rangle \in C^{2^k}\} \tag{۸۷}$$

این فرایند در شکل (۹) نشان داده شده است:



شکل ۹: فرایند کدگذاری و کدگشایی یک حالت کوانتومی و ارسال آن از طریق یک کانال کوانتومی.

[۱۷] Encoder
[۱۸] Decoder

تلاش آلیس و باب این است که این حالت هر چه بیشتر به حالت اولیه نزدیک باشد، یعنی می خواهند که

$$\overline{F}(|\psi_i'\rangle, |\psi_i\rangle) \geq 1-\epsilon \qquad l\forall\ i. \tag{۸۸}$$

نرخ مبادله اطلاعات کوانتومی نیز مثل همیشه برابر است با نسبت تعداد بیت های منطقی به تعداد بیت های فیزیکی که برای مبادله سالم این حالت ها به کار می بریم. هر چه که این نسبت بالاتر باشد به معنای این است که کانال کوانتومی ظرفیت بیشتری دارد. اگر کانال هیچ گونه خطایی نداشته باشد،این نسبت برابر با یک است. هر چه که خطای کانال بیشتر باشد، این نسبت کوچکتر می شود. تعداد واقعی حالت هایی که در واحد زمان می توانیم از کانال عبور دهیم بستگی به خصوصیات فیزیکی کانال (سرعت بارگذاری حالت ها در کانال، سرعت سویچ ها، زمان واهلش کانال و عوامل متعدد دیگر) دارد. تعیین این تعداد دیگر ربطی به مسئله تعیین ظرفیت ندارد و یک مسئله مهندسی خالص است. ظرفیت یعنی تعیین حداکثر نرخ R. طبیعی است که این نرخ بستگی به نوع منبع [۱۹] دارد. از آنجا که همواره در کدگذاری حالت ها توجه ما به رشته های بی نهایت بلند است، برای یک منبع مشخص نرخ مبادله به صورت زیر تعریف می شود:

$$R(X) := \lim_{n\longrightarrow\infty} \frac{k}{n} \quad , \quad \overline{F}(|\psi_i'\rangle, |\psi_i\rangle) \geq 1-\epsilon \qquad \forall\ i. \tag{۸۹}$$

ظرفیت کوانتومی کانال طبیعتا با محاسبه حداکثر نرخ روی همه مجموعه حالت های ورودی تعریف می شود، یعنی:

$$C_q(\Lambda) := \underset{X}{Max}\ R(X) \tag{۹۰}$$

تا اینجا آنچه که گفته ایم کرده ایم، تعریف عملیاتی [۲۰] ظرفیت کوانتومی یک کانال است. این که آیا این تعریف عملیاتی منجر به یک فرمول یا دستورالعمل قابل محاسبه برای ظرفیت کوانتومی می شود یا نه، موضوع دیگری است. نشان داده شده که این تعریف عملیاتی ظرفیت کوانتومی را می توان به محاسبه یک عبارت تقلیل داد، اگر چه محاسبه خود این عبارت اصلا ساده نیست. این عبارت چنین است:

$$C_q(\Lambda) = \lim_{n\longrightarrow\infty} \frac{1}{n} J(\Lambda^{\otimes n}) \tag{۹۱}$$

که در آن

$$J(\Lambda^{\otimes n}) = \underset{\rho}{Max}\ J(\rho, \Lambda^{\otimes n}). \tag{۹۲}$$

[۱۹] Source

[۲۰] Operational Definition

برای هر کانال کوانتومی مثل Λ و هر حالت ρ نیزعبارت $J(\rho,\Lambda)$ اطلاعات همدوسِ [۲۱] نام دارد و چنین تعریف می شود:

$$J(\rho,\Lambda) = S\big[\Lambda(\rho)) - S(\Lambda^c(\rho)\big]. \tag{۹۳}$$

همانطور که دیده می شود، دشواری عمده این محاسبه در محاسبه حد $n \longrightarrow \infty$ است . این محاسبه برای یک کانال عمومی تقریبا غیرممکن است. در اینجاست که کاهش پذیر یا پادکاهش ناپذیر بودن یک کانال مهم می شود. نشان داده شده که برای کانال پاد_کاهش ناپذیر، ظرفیت برابر با صفر است و برای کانال کاهش پذیر نیز خاصیت جمع پذیری برقرار است. این خاصیت به این معناست که:

$$J_n(\Lambda^{\otimes n}) = nJ(\Lambda) \tag{۹۴}$$

و در نتیجه رابطه نسبتا ساده زیر برای این کانال ها برقرار است:

$$C_q(\Lambda) = J(\Lambda) = Max_\rho S\big[\Lambda(\rho)) - S(\Lambda^c(\rho)\big]. \tag{۹۵}$$

اگر چه از شرّ محاسبه حد $n \longrightarrow \infty$ رها شده ایم، ولی محاسبه عبارت طرف راست رابطه بالا هنوز ساده نیست زیرا نشان داده شده که عبارت طرف راست دارای خاصیت تحدب یا تقعر نیست و بنابراین یافتن بیشینه آن روی حالت ها چندان ساده نیست. در نتیجه برای یافتن حالت بیشینه می بایست روی فضای تمام حالت ها جستجو کنیم. ولی هر چه هست محاسبه به میزان خیلی زیادی، البته برای کانال های کاهش پذیر، ساده شده است.

- **مثال:** ظرفیت کوانتومی کانال کیوبیتی

$$\Lambda_{\frac{1}{2}}(\rho) = \frac{1}{2}(\rho + X\rho X)$$

را بدست آورید.

حل: این کانال همان کانال بیت_برگردان برای $p=\frac{1}{2}$ است. قبلا در یکی از مثال ها کانال مکمل بیت برگردان را برای p دلخواه تعیین کرده ایم. می دانیم که

$$\Lambda_p\begin{pmatrix} a & b \\ b^* & c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (1-p)a+pc & (1-p)b+pb^* \\ (1-p)b^*+pb & (1-p)c+pa \end{pmatrix}$$

[۲۱] Coherent Information

$$, \qquad \Lambda_p^c \begin{pmatrix} a & b \\ b^* & c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1-p & \sqrt{p(1-P)}(b+b^*) \\ \sqrt{p(1-p)}(b+b^*) & p \end{pmatrix} \qquad (۹۶)$$

اگر p را برابر با $\frac{1}{2}$ قرار دهیم، متوجه می شویم که هر دو کانال به یک شکل عمل می کنند، یعنی

$$\Lambda_{\frac{1}{2}}(\rho) = {\Lambda^c}_{\frac{1}{2}}(\rho) \qquad (۹۷)$$

و در نتیجه اطلاعات همدوس آن و در نهایت ظرفیت کوانتومی آن برابر با صفر است. در واقع به دلیل تساوی بالا، معلوم می شود که این کانال یک کانال پادـکاهش پذیر است و در نتیجه بنابر قضیه ای که قبلا نوشته ایم ظرفیت کوانتومی آن حتما برابر با صفر است. برای p دلخواه باید آنتروپی حالت های $\Lambda_{\frac{1}{2}}(\rho)$ و ${\Lambda^c}_{\frac{1}{2}}(\rho)$ را جداگانه حساب کنیم و سپس حالتی را که اطلاعات همدوس را بیشینه می کند پیدا کنیم. این کار اگر به صورت تحلیلی نیز ممکن نباشد، با محاسبات عددی همواره امکان پذیر است.